PROSEMINAR ALGEBRA WS 2014

Die mit ^{s} gekennzeichnete Aufgabe ist schriftlich auszuarbeiten und nächsten Dienstag im Proseminar abzugeben. Aufgaben mit * sind etwas anspruchsvoller.

61 Für welche $k, l \in \mathbb{N}$ induziert die $\mathbb{Z}$-Skalarmultiplikation auf $\mathbb{Z}_k$ eine $\mathbb{Z}_l$-Modulstruktur auf $\mathbb{Z}_k$?

(b) Es seien k, l, m natürliche Zahlen, sodass $\mathbb{Z}_k$ und $\mathbb{Z}_m$ als $\mathbb{Z}_l$-Moduln wie in (a) aufgefasst werden können. Beschreibe $\mathbb{Z}_k \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Z}_m$.

62^s (a) Es sei I Ideal von R und M ein R-Modul. Dann ist

$$I \cdot M = \langle r \cdot x,\ r \in I,\ x \in M \rangle \subseteq M$$

wieder ein R-Modul.

(b) Setze $S = R/I$ und $N = I \cdot M$. Dann gilt $M/N \cong M \otimes_R S$.

Hinweis: Verwende ggf. die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes.

(c)* Es seien $R \to S$ und $R \to T$ Ringhomomorphismen. Vergleiche $S \otimes_R T$ mit dem Faserprodukt $X \times_Z Y$ von Abbildungen $X \to Z$ und $Y \to Z$.

63 (a) Es seien $x, y, z \in R^3$ dargestellt als Linearkombinationen der Standardbasis e_1, e_2, e_3. Berechne die Darstellung von $x \wedge y$ und $x \wedge y \wedge z$ bezüglich der Basis $e_i \wedge e_j$ von $R^3 \wedge R^3$, für $1 \leq i < j \leq 3$, bzw. bezüglich der Basis $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ von $\Lambda^3 R^3$.

(b)* Es seien $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die beiden Koordinatenfunktionen. Interpretiere $f_1 \wedge f_2$ als Abbildung, die Paaren von Vektoren $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ den Flächeninhalt des von ihnen aufgespannten Parallelogramms zuordnet.

Hinweis: Verwende etwa die universelle Eigenschaft des äusseren Produktes.

64 Es sei $S \to R$ ein Ringhomomorphismus. Dann gilt $S^n \otimes_S R \cong R^n$.

65 Für $S \subseteq R$ multiplikativ abgeschlossene Teilmenge eines Ringes und einen R-Modul M setze $S^{-1} \cdot M = \{x/s,\ x \in M,\ s \in S\}$.

(a) Präzisiere die Definition.

(b) Zeige, dass $S^{-1} \cdot M \cong M \otimes_R S^{-1} \cdot R$.

(c)* Zeige: $- \otimes S^{-1} \cdot R$ ist exakter Funktor auf endlich erzeugten R-Moduln, das heisst, Tensorieren mit $S^{-1} \cdot R$ führt exakte Folgen in exakte Folgen über.

Bemerkung: Man sagt, dass $S^{-1} \cdot R$ ein flacher R-Modul ist.

66* (a) Nakayama-Lemma: Sei (R, m) ein lokaler Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul mit $m \cdot M = M$. Dann gilt $M = 0$.

Hinweis: Beweise zuerst den Fall, dass M ein zyklischer Modul ist, das heisst, von einem Element erzeugt wird. Für den allgemeinen Fall verwende dann Induktion über die Anzahl der Erzeuger von M.

(b) Sei $N \subseteq M$ ein Untermodul, sodass $M = N + mM$ gilt. Zeige, dass $M = N$.

Hinweis: Verwende (a) und die Isomorphie $L_1/(L_1 \cap L_2) \cong (L_1 + L_2)/L_2$.

(c) Sei M ein endlich erzeugter Modul über einem lokalen Ring (R, m). Seien $f_1, \ldots, f_s \in M$ so, dass die Restklassen $\overline{f}_i$ der f_i den Faktormodul $N = M/mM$ als R/m-Vektorraum erzeugen. Dann erzeugen $f_1, \ldots, f_s$ schon ganz M.